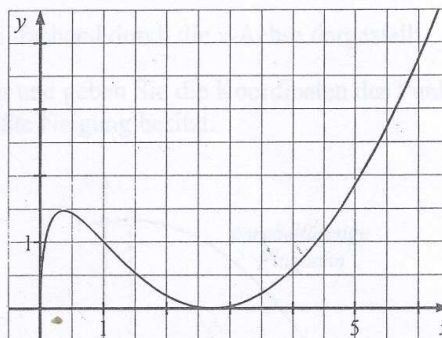


Die Aufgaben umfassen 4 Seiten!

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{\max} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x \cdot (\ln(x) - a)^2$ mit $a \in \mathbb{R}$.
- 1.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_{\max} von f_a und geben Sie die Grenzwerte von f_a an den Rändern von D_{\max} an.
- 1.2 Untersuchen Sie die Funktionen der Schar f_a auf Nullstellen.
- 1.3 Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung von f_a .
[Zur Kontrolle: $f_a''(x) = 2 \cdot \frac{\ln(x) - a + 1}{x}$]
- 1.4 Ermitteln Sie die lokalen Extrempunkte der Graphen der Schar f_a und bestimmen Sie die Art dieser Extrempunkte.
- 1.5 Zeigen Sie, dass jeder Funktionsgraph von f_a einen Wendepunkt besitzt und geben Sie diesen an. Auf welcher Kurve liegen die Wendepunkte der Funktionen der Schar f_a ?
- 1.6 Berechnen Sie die Steigung der Graphen der Schar f_a an der Stelle e^{a-1} . Interpretieren Sie das Ergebnis.
- 1.7 Zeigen Sie, dass je zwei verschiedene Funktionsgraphen der Schar f_a stets einen Punkt gemeinsam besitzen.
- 1.8 Die Abbildung rechts zeigt den Graphen der Funktion der Schar f_a mit dem Parameterwert $a = 1$.
Begründen Sie, dass der Graph zu dem Parameterwert $a = 1$ gehört.



2. Betrachtet wird nachfolgend die Funktion $f : D_{\max} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x \cdot (\ln(x) - 1)^2$.
- 2.1 Die Parallele zur y -Achse mit der Gleichung $x = u$ schneidet für $0 < u < e$ die x -Achse und den Graphen von f . Der Schnittpunkt mit der x -Achse, der Schnittpunkt mit dem Graphen von f und der Koordinatenursprung bilden ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A(u)$.
- 2.1.1 Begründen Sie, dass ein Term für den Flächeninhalt $A(u)$ gegeben ist durch
- $$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot (\ln(u) - 1)^2.$$
- 2.1.2 Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt $A(u)$ des Dreiecks maximal wird. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Fach: Mathematik

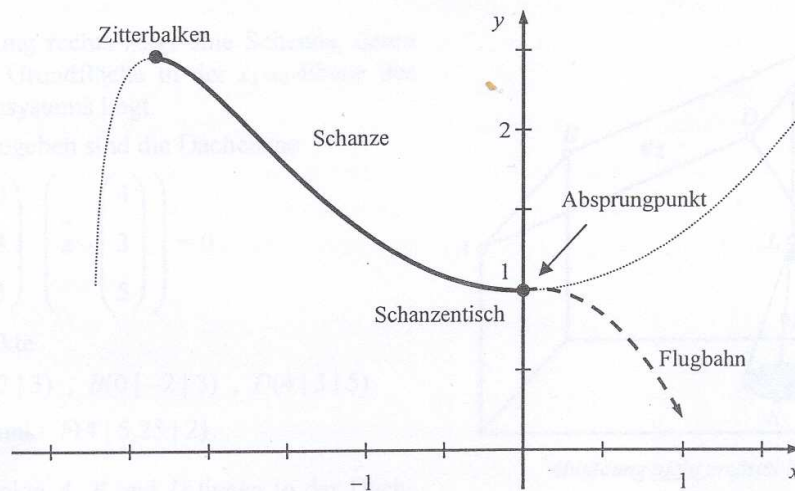
Prüfungsart: 1./2. Prüfungsfach

Dauer: 5 Stunden

Hilfsmittel: Zugelassener Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung

2.2 Die Form des Graphen der Funktion f im Intervall von der lokalen Maximumstelle e^{-1} bis zur lokalen Minimumstelle e dient zur modellhaften Beschreibung des Profils einer Skisprungschanze.

Der Funktionsgraph von f wird dazu im Koordinatensystem verschoben (siehe Abbildung). Einer Einheit auf den Achsen entspricht eine reale Länge von 100 m.



Ein Skispringer startet seinen Anlauf am Zitterbalken und springt am Schanzentisch in einer Höhe von 100 m ab. Die anschließende Flugbahn des Springers kann als parabelförmig angenommen werden.

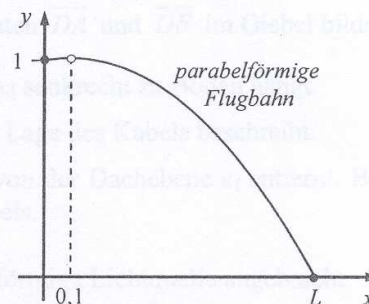
Die Ländefläche wird in dem Modell stark vereinfachend durch die x -Achse dargestellt.

2.2.1 Beschreiben Sie verbal die Verschiebung und geben Sie die Koordinaten des Punktes an, in dem die Skisprungschanze die größte Neigung besitzt.

2.2.2 Der Springer springt in einer Höhe von 100 m ab und erreicht in einer horizontal gemessenen Entfernung von 10 m seine maximale Flughöhe von 101 m.

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass ein Funktionsterm der Flugparabel p gegeben ist durch

$$p(x) = -x^2 + \frac{1}{5}x + 1.$$

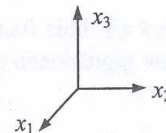


2.2.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Landepunktes L (auf drei Nachkommastellen gerundet).

2.2.4 Weisen Sie nach, dass der Übergang vom Schanzentisch in die parabelförmige Flugbahn nicht glatt, sondern mit einem Knick erfolgt.

Aufgabe 2

Betrachtet wird ein kartesisches Koordinatensystem mit den nebenstehenden Bezeichnungen und Orientierungen der Achsen.



Die Abbildung rechts zeigt eine Scheune, deren rechteckige Grundfläche in der x_1 - x_2 -Ebene des Koordinatensystems liegt.

Weiterhin gegeben sind die Dachebene

$$e_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x - 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

und die Punkte

$$A(4 | -2 | 3), B(0 | -2 | 3), D(4 | 3 | 5)$$

sowie der Punkt $F(4 | 5,25 | 2)$.

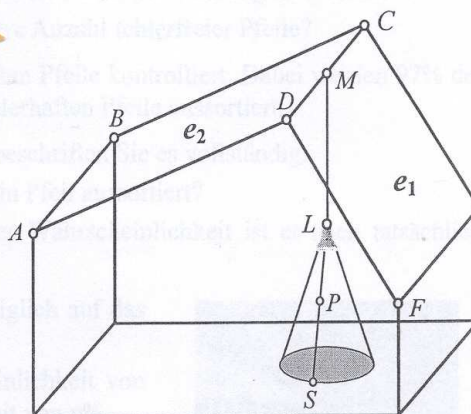


Abbildung nicht maßstäblich

1. Die Punkte A , B und D liegen in der Dachebene e_2 . Ermitteln Sie eine Normalengleichung dieser Ebene e_2 .
2. Die Dachfläche, die in der Ebene e_2 liegt, ist das Rechteck $ABCD$.
 - 2.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C und den Flächeninhalt der Dachfläche $ABCD$.
 - 2.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Dachfirstes \overline{DC} .
3. Berechnen Sie das Maß des Winkels, den die Dachkanten \overline{DA} und \overline{DF} im Giebel bilden.
4. Im Punkt $M(2 | 3 | 5)$ wird ein Stromkabel befestigt, das senkrecht zu Boden hängt.
 - 4.1 Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, welche die Lage des Kabels beschreibt.
 - 4.2 Der Endpunkt L des Kabels ist 1,5 Längeneinheiten von der Dachebene e_1 entfernt. Berechnen Sie die Koordinaten von L und die Länge des Kabels.
5. Im Endpunkt $L(2 | 3 | 2,5)$ des Kabels wird eine punktförmige Lichtquelle angebracht.
 - 5.1 Berechnen Sie den Abstand des Punktes L von der Dachkante \overline{AB} .
 - 5.2 Die von L ausgehenden Lichtstrahlen leuchten einen senkrechten Kreiskegel (mit dem Punkt L als Kegelspitze) aus. Der Punkt $P\left(\frac{5}{2} \mid 3 \mid \frac{5}{4}\right)$ liegt auf dem Mantel des Lichtkegels. Weisen Sie nach, dass der durch P verlaufende Lichtstrahl die Grundfläche der Scheune in $S(3 | 3 | 0)$ trifft.
 - 5.3 Auf dem Boden der Scheune erscheint ein kreisförmiger Lichtfleck. Bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.

Fach: Mathematik

Prüfungsart: 1./2. Prüfungsfach

Dauer: 5 Stunden

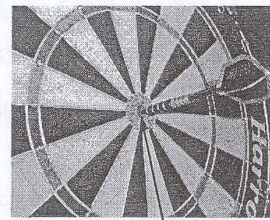
Hilfsmittel: Zugelassener Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung

Aufgabe 3

1. Eine Firma stellt Dart-Pfeile her, von denen erfahrungsgemäß 7% fehlerhaft sind. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Fehler bei der Herstellung der Pfeile unabhängig voneinander auftreten.
- 1.1 Die Firma liefert die Pfeile in Packungen zu 500 Stück aus.
- 1.1.1 Mit welcher Anzahl fehlerfreier Pfeile ist im Mittel pro Packung zu rechnen?
- 1.1.2 Wie groß ist die Streuung um die mittlere Anzahl fehlerfreier Pfeile?
- 1.2 Vor einem Wettkampf werden die neu gekauften Pfeile kontrolliert. Dabei werden 97% der fehlerhaften Pfeile, aber auch 6% der nicht fehlerhaften Pfeile aussortiert.
- 1.2.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und beschriften Sie es vollständig.
- 1.2.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Pfeil aussortiert?
- 1.2.3 Ein Pfeil wird aussortiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er auch tatsächlich fehlerhaft?

2. Peter und Alex spielen Dart, wobei beide lediglich auf das Bullseye in der Mitte der Dartscheibe zielen.

Peter trifft das Bullseye mit einer Wahrscheinlichkeit von 25%. Alex trifft es mit einer Wahrscheinlichkeit von $p\%$.



Bullseye

- 2.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Peter das Bullseye bei acht Würfen
- 2.1.1 genau zweimal?
- 2.1.2 höchstens zweimal?
- 2.1.3 genau mit dem achten Wurf das dritte Mal?
- 2.2 Wie oft muss Peter mindestens werfen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% mindestens einmal das Bullseye trifft?
- 2.3 Alex bietet Peter ein Spiel an. Peter soll dabei zweimal auf das Bullseye werfen.
- 2.3.1 Die Zufallsgröße T beschreibe die Anzahl von Peters Treffern bei zwei Würfen.
- | | | | |
|--------------|----------------|----------------|----------------|
| t_i | 0 | 1 | 2 |
| $P(T = t_i)$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
- Begründen Sie, dass durch die Tabelle rechts die Wahrscheinlichkeitsverteilung von T gegeben ist.
- 2.3.2 Peter muss zunächst einen Einsatz von 2 Euro leisten.
- Pro Treffer bekommt Peter x Euro zurück.
 - Wirft Peter beide Male vorbei, so erhält er nichts zurück.
- Welchen Wert muss x haben, damit Alex ein faires Spiel anbietet?
- 2.4 Am folgenden Tag vereinbaren Peter und Alex ein verändertes Spiel. Sie werfen nun abwechselnd auf das Bullseye, jeder von beiden jedoch höchstens zweimal. Trifft ein Spieler das Bullseye, so hat er gewonnen und das Spiel ist beendet. Peter beginnt mit dem Werfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p , mit der Alex das Bullseye treffen muss, wenn Peter das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% gewinnt.