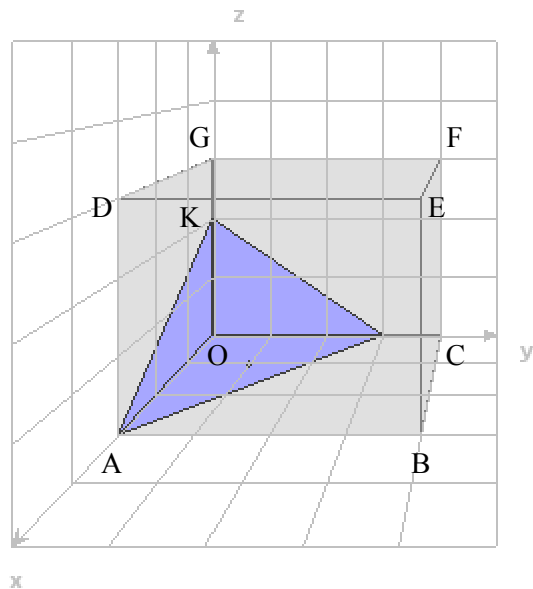


Ein Tetraeder OAHK liegt in einem Quader OABCDEFG der Länge 4, der Breite 3 und der Höhe 3. (vgl. Bild rechts.)



1. Gib die Koordinaten aller Eckpunkte der beiden Körper an.
2. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes M des Quaders und zeichne ihn in das Koordinatensystem ein.
3. Bestimme für die Ebene $e = e_{AHK}$ eine Parametergleichung. Zeige, dass sich e in der Form

$$e: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \text{ darstellen lässt.}$$

4. Transformiere e in die ANF und dann in die Hessesche Normalenform (HNF). Welchen Abstand hat e vom Ursprung?
5. Gib die Koordinatenform von e an. Überprüfe, ob der Mittelpunkt M des Quaders auf e liegt.
6. Zeige, dass $S(1 \mid 1 \mid \frac{2}{3})$ der Schwerpunkt S des Dreiecks AHK ist und überprüfe, ob \vec{OS} ein Normalenvektor von e ist.
7. Berechne den Schwerpunkt T des Tetraeders OAHK. Zeige, dass T auf der Geraden g durch O und S liegt.
8. Gib für e die AAF an und gib eine Gleichung für die Spurgerade s_{yz} von e an.

Wir untersuchen weiter das Dreieck AHK:

9. Welchen Winkel hat das Dreieck in A?
10. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck? Wie weit ist H von A entfernt?
11. Erschließe den Abstand, den der Punkt K von der Strecke AH hat.
12. Ein Tetraeder (Pyramide) hat als Volumen = Grundfläche mal Höhe/3. Erschließe, welches Volumen der Tetraeder OAHK hat?

Lösung

1. O(0|0|0) A(3|0|0) B(3|4|0) C(0|4|0) D(3|0|3) E(3|4|3) F(0|4|3) G(0|0|3)
H(0|3|0) K(0|0|2)

$$2. \vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{g} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+0+0 \\ 0+4+0 \\ 0+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M(\frac{3}{2}|\frac{3}{2}|2)$$

$$3. e: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{AH} + \mu\vec{AK} \quad e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow e: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$4. e: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 6 = 0; \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17} \Rightarrow e: \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \frac{6}{\sqrt{17}} = 0$$
$$d(e, O) = \frac{6}{\sqrt{17}} \approx 1,46$$

$$5. e: 2x + 2y + 3z - 6 = 0 \quad M \in e \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{3}{2} = 6 \Leftrightarrow 3 + 4 + \frac{9}{2} = 6 \quad f \Rightarrow M \notin e.$$

$$6. \vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{h} + \vec{k}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3+0+0 \\ 0+3+0 \\ 0+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow S(1|1|\frac{2}{3}) \quad \text{Damit } \vec{OS} \text{ NV von } e \text{ ist, muss er la}$$

$$\text{zu } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sein. } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = 2 \wedge \alpha = 2 \wedge \alpha = \frac{9}{2} \Rightarrow \text{lu} \Rightarrow \vec{OS} \text{ ist kein NV von } e.$$

$$7. \vec{t} = \frac{1}{4}(\vec{o} + \vec{a} + \vec{h} + \vec{k}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0+3+0+0 \\ 0+0+3+0 \\ 0+0+0+2 \end{pmatrix} \Rightarrow T(\frac{3}{4}|\frac{3}{4}|\frac{1}{2})$$

$$g: \vec{x} = \lambda \vec{s} \Leftrightarrow g: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad T \in g \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 3/4 \wedge \lambda = 3/4 \wedge \lambda = 3/4.$$

$$8. e: \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} - 1 = 0 \quad \text{syz} = g_{HK}: x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$9. \cos \alpha = \frac{\vec{AH} \cdot \vec{AK}}{|\vec{AH}| |\vec{AK}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+9} \sqrt{9+4}} = \frac{9}{\sqrt{18} \sqrt{13}} \approx 0,59 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,59) = 53,96^\circ$$

$$10. \mu = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{4+4+9} = \frac{3}{2} \sqrt{17} \approx 6,18 \quad |\vec{AH}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$$

$$11. \mu = \frac{1}{2} |\vec{AH}| \cdot d \Rightarrow \frac{3}{2} \sqrt{17} = \frac{1}{2} \sqrt{18} \cdot d \Rightarrow d = 3 \cdot \sqrt{17} / \sqrt{18} \approx 2,92$$

$$12. V = \frac{1}{3} \mu \cdot \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{17} \cdot \frac{6}{\sqrt{17}} = 3$$