# Teilgeometrie

Für eine **Beobachtungsgeometrie** muß angenommen werden, daß zu jedem Beobachtungszeitpunkt endliche viele Objekte nur exisitieren.
Für eine Konstruktionsgeometrie dürfen **potentiell** unendliche Objektbereiche gewählt (konstruiert) werden.
Unter Strecken sollen Objekte verstanden werden, die prinzipiell feststellbar, beobachtbar, meßbar sind und durch reale Objekte repräsentiert werden (Stöcke, Kanten etc), aber auch als Bewegungsbahnen vorkommen können.
Zu einer Strecke gibt es stets eine zweielementige Randmenge. Schleifen etc sollen hier außer Acht gelassen werden.
Zu zwei Randpunkten gibt es nicht automatisch eine Strecke, und gibt es eine, kann es auch mehrere geben.
Bewegt sich ein Objekt von einer Beobachterstelle zu einer anderen (Rand der Strecke), so kann nichts über den Zwischenbereich ausgesagt werden, wenn nicht eine zusätzliche Beobachtungszwischenstelle existiert. Dann aber handelt es sich um eine Streckenaddition.
Strecken sind also stets **Elementarstrecken**. Zwischenpunkte auf Strecken gibt es nur durch andere Strecken, die "Teilstrecken" sind, d.h. die in einer anderen Strecke liegen und dadurch einen Randpunkt mit der ersten Strecke inzidieren lassen, oder aber eine Strecke, die auf die erste stößt, deren Randpunkt also mit der ersten Strecke wieder inzidiert.

DEF1: Sei **S** eine nichtleere endliche Menge (aus Strecken), **Rt** eine nichtleere endliche Menge (von Teilrändern) und $R = \wp(Rt)$, $G = S \cup R$
Die Zuordnung $\rho : S \to R$, $s \to \rho(s)$ heißt **der Rand** von s,
wenn $\rho(s) = \{\rho_{1s}, \rho_{2s}\}$ mit $\rho_{1s}, \rho_{2s} \in Rt$

DEF2: Auf S sei eine Relation $\propto$ **(Teil)** definiert mit folgenden Eigenschaften:

(T1) $\bigwedge_{s \in S} s \propto s$ (Automerie)

(T2) $\bigwedge_{s_1, s_2 \in S} s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \propto s_1 \to s_1 = s_2$ (Identität)

(T3) $\bigwedge_{s_1, s_2, s_3 \in S} s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \propto s_3 \to s_1 \propto s_3$ (Transitivität)

(T4) $\bigwedge_{s_1, s_2, s \in S} (s \propto s_1 \wedge s \propto s_2 \to \bigvee_{t \in S} s_1 \propto t \wedge s_2 \propto t)$ (Konnektivität)

(T4′) $\bigwedge_{s_1, s_2, s \in S} (\rho(s_1) = \{a, b\} \wedge \rho(s_2) = \{c, d\} \wedge \rho(s) = \{c, b\} \wedge s \propto s_1 \wedge s \propto s_2 \to$
$\to \bigvee_{t \in S} \rho(t) = \{a, d\} \wedge s_1 \propto t \wedge s_2 \propto t)$ (präzise Konnektivität)

(T5) $\bigwedge_{s_1, s_2 \in S} s_1 \propto s_2 \wedge \neg(s_2 \propto s_1) \to \rho(s_1) \neq \rho(s_2)$

Bem: Gilt $s \propto t$, so nennt man s **Teil** von t und t **Fortsetzung** von s.

DEF 3: $\bigwedge\limits_{s,t \in S} s \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} t :\leftrightarrow s \propto t \wedge t \not\propto s.$ $\quad \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid}$ heißt **echter Teil** .

DEF 4: Zwei Strecken $s_1$ und $s_2$ heißen **kollinear** $(s_1 \cdot\!\cdot\!\cdot s_2)$: gdw $\bigvee\limits_{s \in S} s_1 \propto s \wedge s_2 \propto s$

Bem: Zwei Strecken sind also genau dann kollinear, wenn sie eine gemeinsame Fortsetzung haben.

Satz 1:

(1) $s_1 \propto s_2 \wedge s_1 \neq s_2 \Leftrightarrow s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2$

(2) $s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2 \Rightarrow \rho(s_1) \neq \rho(s_2)$

(3) $s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_3 \Rightarrow s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_3$

(4) $s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2 \wedge s_2 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_3 \Rightarrow s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_3$

(5) $s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2 \Rightarrow \neg(s_2 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_1)$

(6) $\neg(s \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s)$

Bew: (1) "$\Rightarrow$": $s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \propto s_1 \overset{T2}{\Rightarrow} s_1 = s_2$ also $s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \neq s_1 \Rightarrow s_2 \not\propto s_1$

also $s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \neq s_1 \Rightarrow s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \not\propto s_1 \overset{DEF3}{\Rightarrow} s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2$

"$\Leftarrow$": $s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2 \overset{DEF3}{\Rightarrow} s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \not\propto s_1$ Wäre $s_1 = s_2 \overset{T1\,(s_1 \propto s_1)}{\Rightarrow} s_2 \propto s_1$ Wid.

(2) $s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2 \overset{T5,DEF3}{\Rightarrow} \rho(s_1) \neq \rho(s_2)$

(3) $s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_3 \Rightarrow s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \propto s_3 \wedge s_3 \not\propto s_2 \overset{T3}{\Rightarrow} s_1 \propto s_3 \wedge s_3 \not\propto s_2$

Annahme: $s_3 \propto s_1 \overset{s_1 \propto s_2}{\Rightarrow} s_3 \propto s_2$ Wid $\Rightarrow s_1 \propto s_3 \wedge s_3 \not\propto s_1 \Rightarrow s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s$

(4) $s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2 \wedge s_2 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_3 \overset{DEF3}{\Rightarrow} s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_3 \overset{(3)}{\Rightarrow} s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_3$

(5) Gelte $s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2$. Annahme: $s_2 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_1 \overset{s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_2,(4)}{\Rightarrow} s_1 \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} s_1 \neq s_1$ Wid

(6) Annahme: $s \mathrel{\propto\hspace{-0.6em}\shortmid} s \overset{(2)}{\Rightarrow} \rho(s) \neq \rho(s)$ Wid

Satz 2: Die Kollinearität ist Äquivalenzrelation.

Bew: (1) Reflexivität : $s_1 \ddots s_1$ da $s_1 \propto s_1$ (s ist als $s_1$ wählbar)

(2) Symmetrie : Sei $s_1 \ddots s_2 \Rightarrow \bigvee_{s\in S} s_1 \propto s \wedge s_2 \propto s \Rightarrow \bigvee_{s\in S} s_2 \propto s \wedge s_1 \propto s \Rightarrow s_2 \ddots s_1$

(3) Transitivität : Sei $s_1 \ddots s_2 \wedge s_2 \ddots s_3 \Rightarrow \bigvee_{s\in S} s_1 \propto s \wedge s_2 \propto s \wedge \bigvee_{t\in S} s_2 \propto t \wedge s_3 \propto t$

$\overset{s_2 \propto s \wedge s_2 \propto t \quad \text{nach T4}}{\Rightarrow} \bigvee_{u\in S} s \propto u \wedge t \propto u \Rightarrow s_1 \ddots s_3$

Satz 3:

(1) $s \propto t \Rightarrow s \ddots t$

(2) $s_1 \propto s_2 \wedge s_1 \ddots t \Rightarrow s_2 \ddots t$

(3) $s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \ddots t \Rightarrow s_1 \ddots t$

(4) $s \propto t \wedge s \propto u \Rightarrow t \ddots u$

Bew.: (1) $s \propto t \Rightarrow s \propto t \wedge t \propto t \Rightarrow s \ddots t$

(2) $s_1 \propto s_2 \wedge s_1 \ddots t \Rightarrow \bigvee_{u\in S} (t \propto u \wedge s_1 \propto u) \wedge s_1 \propto s_2 \overset{T4}{\Rightarrow} \bigvee_{v\in S} u \propto v \wedge s_2 \propto v$

$\overset{t \propto u \wedge u \propto v}{\Rightarrow} t \propto v \wedge s_2 \propto v \Rightarrow s_2 \ddots t$

(3) $s_1 \propto s_2 \wedge s_2 \ddots t \Rightarrow \bigvee_{u\in S} (s_2 \propto u \wedge t \propto u) \wedge s_1 \propto s_2 \Rightarrow s_1 \propto u \wedge t \propto u \Rightarrow s_1 \ddots t$

(4) $s \propto t \wedge s \propto u \overset{(1)}{\Rightarrow} s \ddots t \wedge s \ddots u \overset{\text{Satz2}}{\Rightarrow} t \ddots s \wedge s \ddots u \overset{\text{Satz2}}{\Rightarrow} t \ddots u$

DEF 5: Sei $s \in S$. Die Äquivalenzklasse $[s] = \{t \in S / t \ddots s\}$ heißt **Gerade** von s.

Bem: Jede Gerade ist endlich, da es nur endlich viele Strecken gibt.

DEF 6: Eine Relation I (**Inzidenz**) auf $Rt \times S$ sei definiert mit folgenden Eigenschaften:

(I1) $a\, I\, s \wedge b\, I\, s \wedge a \neq b \quad \Rightarrow \quad \overset{1}{\underset{t \in S}{\bigvee}} \rho(t) = \{a, b\} \wedge t \propto s$

(I2) $a\, I\, s \wedge b\, I\, s \wedge \rho(t) = \{a, b\} \wedge \underset{u \in S}{\bigvee} t \propto u \wedge s \propto u \quad \Rightarrow \quad t \propto s$

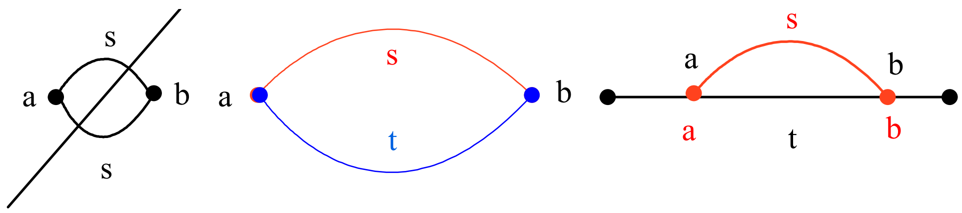
(I3) $s \propto t \wedge a \in \rho(s) \quad \Rightarrow \quad a\, I\, t$

(I4) $u \ddots v \ddots w \wedge \rho(u) = \{a, b\} \wedge \rho(v) = \{a, c\} \wedge \rho(w) = \{b, c\} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad c\, I\, u \vee b\, I\, v \vee a\, I\, w$

Bem.: 1) (I3) $\Rightarrow$ Ränder inzidieren mit ihren Strecken.

2) (I1) besagt, daß Strecken keine "Blasen" besitzen. Oder anders: kommen Blasen vor, so gehören sie verschiedenen Strecken an.




Bew.: zu 1) Setze für s gleich t in I3

Satz 4: (1) $x\, I\, s \wedge \rho(s) = \{a, b\} \wedge x \neq a \wedge x \neq b \Rightarrow \overset{1}{\underset{t \in S}{\bigvee}} \rho(t) = \{a, x\} \wedge t \propto s$

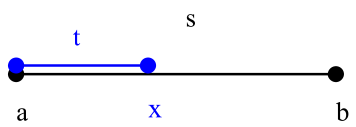
(2) $x\, I\, s \wedge y\, I\, s \wedge \rho(s) = \{a, b\} \wedge x \neq y \wedge \{x, y\} \neq \{a, b\} \Rightarrow \overset{1}{\underset{t \in S}{\bigvee}} \rho(t) = \{x, y\} \wedge t \propto s$

(3) $a\, I\, s \wedge b\, I\, s \wedge \rho(t) = \{a, b\} \wedge s \ddots t \Rightarrow t \propto s$

(4) $\rho(s) = \rho(t) \wedge s \ddots t \Rightarrow s = t$

(5) $a\, I\, s \wedge s \propto t \Rightarrow a\, I\, t$

Bew.: (1)




nach I1 gilt: $\overset{1}{\underset{t \in S}{\bigvee}} \rho(t) = \{a, x\} \wedge t \propto s$

Annahme : $t = s \Rightarrow \rho(t) = \rho(s) \Rightarrow \{a, x\} = \{a, b\}$

$\Rightarrow x = b$ Wid. zur Vor.

(2) nach I1 gilt: $\overset{1}{\underset{t \in S}{\bigvee}} \rho(t) = \{x, y\} \wedge t \propto s.$ Sei $t = s \Rightarrow \rho(t) = \rho(s) \Rightarrow$
$\{x, y\} = \{a, b\} \Rightarrow$ Wid. zur Vor.

(3) folgt direkt aus I2 und Def 4

(4) (3) $\Rightarrow t \propto s$ und symmetrisch $s \propto t$ (da $s \ddots t \Leftrightarrow t \ddots s$) $\overset{T2}{\Rightarrow} s = t$

(5) Sei $\rho(s) = \{b, c\}$. da $a\, I\, s \wedge b\, I\, s \wedge a \neq b \overset{I1}{\Rightarrow} \underset{u \in S}{\bigvee} \rho(u) = \{a, b\} \wedge u \propto s$
da $s \propto t \Rightarrow u \propto t$. da $a \in \rho(u) \overset{I3}{\Rightarrow} a\, I\, t$.

DEF 7: Ein Tripel $(E, s_1, s_2) \in Rt \times S^2$ heißt **Winkel** gdw: $E \in \rho(s_1) \cap \rho(s_2)$
$s_1$ und $s_2$ heißen die **Schenkel** des Winkels, E der **Scheitel** des Winkels.

DEF 8: (1) Ein Winkel $(E,s_1,s_2)$ heißt **uneigentlich**, wenn $s_1 \ddots s_2$,
sonst **eigentlich**.

(2) Ein Winkel $(E,s_1,s_2)$ heißt **Nullwinkel (NW), wenn** $s_1 \propto s_2 \vee s_2 \propto s_1$

(3) Ein uneigentlicher Winkel, der kein Nullwinkel ist, heißt **gestreckter Winkel** (GW)

Satz 5: Sei $(E, s_1, s_2)$ NW mit $\rho(s_1) = \{E, F_1\}$, $\rho(s_2) = \{E, F_2\}$, dann gilt:

(1) $F_1 = F_2 \vee F_1\, I\, s_2 \vee F_2\, I\, s_1$

(2) es existiert keine Strecke t mit: $\rho(t) = \{F_1, F_2\} \wedge t \ddots s_1 \wedge E\, I\, t$

Bew.: (1) $F_1 \neq F_2 \wedge$ o.B.d.A. sei $s_1 \propto s_2 \overset{I3}{\Rightarrow} F_1 \, I \, s_2$

(2) Sei $F_1 = F_2 \Rightarrow$ Beh.

Sei $F_1 \neq F_2$. Sei $t \in S$ mit $\rho(t) = \{F_1, F_2\} \wedge t \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s_1$. Sei oBdA $s_1 \propto s_2 \overset{\text{Satz3(2)}}{\Rightarrow} t \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s_2$

$\overset{\text{Satz4(3)}}{\Rightarrow} t \propto s_2$. Annahme : $E \, I \, t$. $E \neq F_1 \wedge E \neq F_2 \overset{\text{Satz4(1)}}{\Rightarrow} \bigvee_{u \in S} \rho(u) = \{E, F_2\} \wedge u \not\propto t$

$\overset{\text{Satz1(4)}}{\Rightarrow} u \not\propto s_2 \overset{\text{Satz1(2)}}{\Rightarrow} \rho(u) \neq \rho(s_2)$ Wid.

---

Satz 6: Sei $(E, s_1, s_2)$ ein Winkel mit $\rho(s_1) = \{E, F_1\}$, $\rho(s_2) = \{E, F_2\}$ .

(1) $(E, s_1, s_2)$ GW $\Rightarrow \overset{1}{\bigvee_{s \in S}} \rho(s) = \{F_1, F_2\} \wedge s_1 \not\propto s \wedge s_2 \not\propto s \wedge E \, I \, s$

(2) $\bigvee_{s \in S} \rho(s) = \{F_1, F_2\} \wedge s_1 \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s \wedge s_2 \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s \wedge E \, I \, s \Rightarrow (E, s_1, s_2)$ GW

(3) $(E, s_1, s_2)$ GW $\Leftrightarrow \bigvee_{s \in S} \rho(s) = \{F_1, F_2\} \wedge s_1 \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s \wedge s_2 \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s \wedge E \, I \, s$

---

Bew.: (1) $F_1 \neq F_2$

(sonst $\Rightarrow \rho(s_1) = \rho(s_2)$. $s_1 \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s_2 \overset{\text{Satz4(4)}}{\Rightarrow} s_1 = s_2 \Rightarrow (E, s_1, s_2)$ NW $\Rightarrow$ Wid)

$s_1 \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s_2 \overset{\text{Def 4}}{\Rightarrow} \bigvee_{t \in S} s_1 \propto t \wedge s_2 \propto t \Rightarrow F_1 \, I \, t \wedge F_2 \, I \, t \overset{I1}{\Rightarrow} \overset{1}{\bigvee_{s \in S}} \rho(s) = \{F_1, F_2\} \wedge s \propto t \; (*)$

$\Rightarrow s \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s_1 \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s_2 \overset{I4}{\Rightarrow} F_2 \, I \, s_1 \vee E \, I \, s \vee F_1 \, I \, s_2$

Ann : $F_2 \, I \, s_1 \overset{\text{Satz 4(3)}}{\Rightarrow} s_2 \propto s_1$ Wid zu GW

Ann : $F_1 \, I \, s_2 \overset{\text{Satz 4(3)}}{\Rightarrow} s_1 \propto s_2$ Wid zu GW

$\Rightarrow E \, I \, s \overset{\text{Satz 4(3)}}{\Rightarrow} s_2 \propto s \wedge s_1 \propto s$. Ann : $s_2 = s \Rightarrow E = F_1$ Wid $\overset{\text{Satz1(1)}}{\Rightarrow} s_2 \not\propto s$

Ann : $s_1 = s \Rightarrow E = F_2$ Wid $\overset{\text{Satz1(1)}}{\Rightarrow} s_1 \not\propto s$.

Ann : ex zweites $s' \in S$ mit $\rho(s') = \{F_1, F_2\} \wedge s_1 \not\propto s' \wedge s_2 \not\propto s' \wedge E \, I \, s'$

Zu zeigen ist dazu nach (*), daß$s' \propto t$. da $s_1 \propto s' \wedge s_1 \propto s \overset{\text{Satz 3(4)}}{\Rightarrow} s' \mathbin{{}^{\cdot}\cdot{}_{.}} s$

$$F_1 \; I \; t \wedge F_2 \; I \; t \wedge \rho(s') = \{F_1, F_2\} \wedge t \ddots s' \overset{\text{Satz 4(3)}}{\Rightarrow} s' \propto t \Rightarrow \text{Eindeutigkeit}$$

(2) $s_1 \ddots s \wedge s_2 \ddots s \overset{\text{Satz2}}{\Rightarrow} s_1 \ddots s_2 \Rightarrow (E, s_1, s_2)$ entweder NW oder GW.

$\overset{\text{Satz5(2)}}{\Rightarrow} (E, s_1, s_2)$ kein NW $\Rightarrow (E, s_1, s_2)$ GW

(3) "$\Rightarrow$": $(E, s_1, s_2)$ GW $\overset{(1)}{\Rightarrow} \bigvee^{1}_{s \in S} \rho(s) = \{F_1, F_2\} \wedge s_1 \propto s \wedge s_2 \propto s \wedge E \; I \; s$

$\overset{\text{Satz3(1)}}{\Rightarrow} s_1 \ddots s \wedge s_2 \ddots s.$

"$\Leftarrow$": gilt nach (2).

Bem.: Sei $s \in S$ und $a, b \in Rt$ und $a \neq b$, dann gilt: $a, b \; I \; s \overset{\text{I1}}{\Rightarrow} \bigvee^{1}_{t \in S} \rho(t) = \{a, b\} \wedge t \propto s$

Diese eindeutig bestimmte Strecke benennen wir.

DEF 9: Sei $s \in S$, $a, b \in Rt$, $a \neq b$, $a, b \; I \; s$.
Dann heißt die nach obiger Bemerkung eindeutig in s bestimmte Strecke
die **Strecke ab in s**, in Zeichen: $(ab)_s$

Bem: $(ab)_s = (ba)_s$ wegen der bzgl. a,b symmetrischen Definition.

Satz 7: (1) $a \; I \; (bc)_s \wedge a \neq b \wedge a \neq c \Rightarrow (ac)_s \propto (bc)_s \wedge (ab)_s \propto (bc)_s$

(2) $a, b \; I \; s \wedge s \propto t \Rightarrow (ab)_s = (ab)_t$

(3) $a, b \; I \; s \wedge a, b \; I \; t \wedge s \ddots t \Rightarrow (ab)_s = (ab)_t$

(4) $\rho(s) = \{a, b\} \wedge s \propto t \Rightarrow s = (ab)_t$

Bew.: (1) 1.Teil:

$a \; I \; (bc)_s \wedge a \neq b \wedge a \neq c \wedge (bc)_s \propto s \overset{\text{Satz4(5)}}{\Rightarrow} a \; I \; s \,.\, a \neq c \wedge c \; I \; s \Rightarrow \bigvee^{1}_{t \in S} t = (ac)_s$

$a \; I \; (bc)_s \wedge c \; I \; (bc)_s \wedge a \neq c \overset{\text{Satz4(2)}}{\Rightarrow} \bigvee^{1}_{u \in S} \rho(u) = \{a, c\} \wedge u \propto (bc)_s.$

$u \propto (bc)_s \propto s \Rightarrow u \propto s.$ da $\rho(u) = \{a, c\} \wedge u \ddots t \overset{\text{Satz4(4)}}{\Rightarrow} u = (ac)_s \Rightarrow (ac)_s \propto (bc)_s.$

2.Teil folgt aus dem 1.Teil, wenn man b und c miteinander vertauscht.

(2) $a,b\ I\ s \wedge s \propto t \overset{\text{Satz4(5)}}{\Rightarrow} a,b\ I\ t \Rightarrow \overset{1}{\underset{u\in S}{\bigvee}} \rho(u)=\{a,b\} \wedge u \propto t.$

$a,b\ I\ s \Rightarrow \overset{1}{\underset{v\in S}{\bigvee}} \rho(v)=\{a,b\} \wedge v \propto s.\ v \propto s \propto t \Rightarrow v \propto t.\ u \propto t \Rightarrow u \dot{\cdot}\!\!. v$

$\overset{\text{Satz4(4)}}{\Rightarrow} u=v \Rightarrow (ab)_s=(ab)_t$

(3) $s \dot{\cdot}\!\!. t \Rightarrow \underset{u\in S}{\bigvee} s \propto u \wedge t \propto u.\ a,b\ I\ s \Rightarrow a,b\ I\ u \Rightarrow \overset{1}{\underset{v\in S}{\bigvee}} \rho(v)=\{a,b\} \wedge v \propto u$

$\overset{1}{\underset{w\in S}{\bigvee}} \rho(w)=\{a,b\} \wedge w \propto s \wedge \overset{1}{\underset{x\in S}{\bigvee}} \rho(x)=\{a,b\} \wedge x \propto t.\ x \propto t \propto u \Rightarrow x \propto u$

$w \propto s \propto u \Rightarrow w \propto u \wedge v \propto u \Rightarrow x \dot{\cdot}\!\!. w \dot{\cdot}\!\!. v \Rightarrow x=w=v \Rightarrow (ab)_u=(ab)_s=(ab)_t$

(4) $a,b\ I\ s \wedge s \propto t \Rightarrow a,b\ I\ t \wedge a \neq b \overset{\text{I1}}{\Rightarrow} \overset{1}{\underset{t_1\in S}{\bigvee}} \rho(t_1)=\{a,b\} \wedge t_1 \propto t \overset{\text{Def 9}}{\Rightarrow}$

$t_1=(ab)_t$. Da $\rho(s)=\{a,b\} \wedge s \propto t \Rightarrow s=t_1=(ab)_t$

DEF 10: Sei $s \in S$, $a,b,c \in Rt$ paarweise verschiedene Teilränder.

b **liegt in s zwischen** a und c $(a[b]_s c)$: gdw $a,b,c\ I\ s \wedge b\ I\ (ac)_s$

Satz 8: (1) $a[b]_s c \Rightarrow (ab)_s \subset (ac)_s \wedge (bc)_s \subset (ac)_s$

(2) $a[b]_s c \Leftrightarrow c[b]_s a$

(3) $a[b]_s c \Rightarrow \neg\ b[a]_s c \wedge \neg\ a[c]_s b$

(4) $a,b,c\ I\ s \wedge a,b,c$ paarweise verschieden $\Rightarrow a[b]_s c \vee a[c]_s b \vee b[a]_s c$

(5) $a[b]_s c \wedge b[c]_s d \Rightarrow a[b]_s d \wedge a[c]_s d$

(6) $a[b]_s c \wedge b[b']_s c \Rightarrow \neg b[a]_s b' \wedge a[b']_s c$

(7) $a[b]_s c \wedge a[b']_s c \Rightarrow b=b' \vee \neg b[a]_s b'$

Bew.: (1) folgt direkt aus Satz 7(1)

(2) $a[b]_s c \Rightarrow a,b,c\ I\ s \wedge b\ I\ (ac)_s \Rightarrow a,b,c\ I\ s \wedge b\ I\ (ca)_s \Rightarrow c[b]_s a$

(3) $a[b]_s c \Rightarrow a,b,c\ I\ s \wedge b\ I\ (ac)_s \wedge b \neq a \wedge b \neq c \overset{\text{Satz7}}{\Rightarrow} (bc)_s \propto (ac)_s$

$\text{Ann}: a\ I\ (bc)_s \overset{\text{Satz7}}{\Rightarrow} (ac)_s \propto (bc)_s \overset{\text{Satz1(4)}}{\Rightarrow} (ac)_s \propto (ac)_s$ Wid nach Satz1(6).

der 2.Teil gilt aus Symmetriegründen (Vertauschung von a und c und nach (1))

(4) $(a,b)_s \dot{\cdot}.(a,c)_s \dot{\cdot}.(b,c)_s \overset{(I4)}{\Rightarrow} b\ I\ (ac)_s \vee c\ I\ (ab)_s \vee a\ I\ (bc)_s \overset{\text{Def 10}}{\Rightarrow}$

$a[b]_s c \vee a[c]_s b \vee b[a]_s c.$

(5) $a[b]_s c \wedge b[c]_s d.$ $(a = d \Rightarrow a[b]_s c \wedge b[c]_s a$ Wid zu(2)) $\Rightarrow a \neq d$

$\Rightarrow a, b, c, d$ paarweise verschieden, $a, b, c, d\ I\ s$

$b\ I\ (ac)_s \wedge c\ I\ (bd)_s \overset{\text{Satz8(1)}}{\Rightarrow} (bc)_s \propto (ac)_s \wedge (bc)_s \propto (bd)_s$

$\overset{T4'}{\Rightarrow} \bigvee_{t\in S} \rho(t) = \{a,d\} \wedge (ac)_s \propto t \wedge (bd)_s \propto t.\ t \dot{\cdot}.(ac)_s \wedge (ac)_s \propto s \overset{\text{Satz3(2)}}{\Rightarrow} t \dot{\cdot}.s$

$\text{Bem} \Rightarrow \overset{1}{\bigvee_{u\in S}} \rho(u) = \{a,d\} \wedge u \propto t.$ $u = (ad)_t.$ $u \propto t \Rightarrow u \dot{\cdot}.t \wedge \rho(u) = \rho(t)$

$\overset{\text{Satz4(4)}}{\Rightarrow} u = t \Rightarrow t = (ad)_t.$ $a, d\ I\ s \wedge a, d\ I\ t \wedge s \dot{\cdot}.t \overset{\text{Satz7(3)}}{\Rightarrow} (ad)_s = (ad)_t = t$

$(bd)_s \propto t = (ad)_s \Rightarrow b\ I\ (ad)_s \Rightarrow a[b]_s d$

$(ac)_s \propto t = (ad)_s \Rightarrow c\ I\ (ad)_s \Rightarrow a[c]_s d.$

(6) 1.Teil : $a[b]_s c \wedge b[b']_s c.$ Wäre $b = b' \Rightarrow a[b]_s c \wedge b[a]_s c$ in Wid zu Satz 8(3

$\Rightarrow b \neq b'.$ Ann: $b[a]_s b' \overset{\text{Satz 8(3)}}{\Rightarrow} \neg b[b']_s c$ in Wid. zur Vor

2.Teil : $a \neq c, b' \neq c.$ Wäre $a = b'y \Rightarrow a[b]_s c \wedge b[a]_s c$ in Wid zu Satz 8(3)

Also sind a, b' und c paarweise verschieden. $\overset{\text{Satz 8(4)}}{\Rightarrow} a[b']_s c \vee b'[a]_s c \vee a[c]_s b'$

Ann.: $b'[a]_s c \overset{\text{Satz 8(1)}}{\Rightarrow} (ac)_s \subset (cb')_s.$ $\text{Vor} \Rightarrow b[b']_s c \overset{\text{Satz 8(1)}}{\Rightarrow} (cb')_s \subset (bc)_s \Rightarrow$

$(ac)_s \subset (cb')_s \subset (bc)_s \overset{\text{Satz 1(4)}}{\Rightarrow} (ac)_s \subset (bc)_s \overset{\text{Satz 4(5)}}{\Rightarrow} a\ I\ (bc)_s \overset{\text{Def 10}}{\Rightarrow} b[a]_s c$

Wid zu $a[b]_s c$ wegen Satz 8(3).

Ann.: $a[c]_s b' \overset{\text{Satz 8(2)}}{\Rightarrow} b'[c]_s a.$ Nach Vor. gilt: $b[b']_s c \overset{\text{Satz 8(5)}}{\Rightarrow} b[c]_s a$ im

Wid zu $a[b]_s c$ nach Satz 8(3). Also bleibt nur übrig: $a[b']_s c$.

(7) Sei $a[b]_s c \wedge a[b']_s c \wedge b \neq b' \wedge \neg(a[b']_s b \vee a[b]_s b')$. Es gilt: $a \neq b, a \neq b'$

$b \neq b' \Rightarrow a, b, b'$ paarweise verschieden. $\overset{\text{Satz 8(4)}}{\Rightarrow} a[b']_s b \vee a[b]_s b' \vee b[a]_s b'$.

Wegen $\neg(a[b']_s b \vee a[b]_s b')$ folgt $b[a]_s b' \overset{\text{Satz 8(2)}}{\Rightarrow} b'[a]_s b$

$$\left.\begin{array}{l} b'[a]_s b \wedge a[b]_s c \overset{\text{Satz 8(5)}}{\Rightarrow} b'[b]_s c \\ b[a]_s b' \wedge a[b']_s c \overset{\text{Satz 8(5)}}{\Rightarrow} b[b']_s c \end{array}\right\} \text{ Wid nach Satz 8(3). Also ist}$$

$a[b]_s c \wedge a[b']_s c \wedge b \neq b' \wedge \neg(a[b']_s b \vee a[b]_s b')$ widersprüchlich, deshalb gilt
$a[b]_s c \wedge a[b']_s c \Rightarrow b = b' \vee a[b']_s b \vee a[b]_s b'$

---

**Satz 9:** $F_1, E, F_2 \in Rt$ paarweise verschieden und $s_1, s_2, s \in S$ und $s_1 \mathbin{\dot{\cdot}.} s_2 \mathbin{\dot{\cdot}.} s$ und

$\rho(s_1) = \{E, F_1\}$ und $\rho(s_2) = \{E, F_2\}$ $\wedge\ w_1 = (E, s_1, s_2)$ Winkel, dann gilt:

$s_1, s_2 \propto s \quad \wedge \quad w_1$ GW $\quad \Leftrightarrow \quad F_1[E]_s F_2$

---

Bew.: (1) "$\Rightarrow$": $s_1, s_2 \propto s \overset{\text{I3}}{\Rightarrow} E, F_1, F_2\ I\ s. \quad \overset{\text{I1}}{\Rightarrow} \bigvee^{1}_{t\in S} t = (F_1 F_2)_s \wedge t \propto s.$

$\overset{\text{Satz 6(1)}}{\Rightarrow} \bigvee_{t'\in S} \rho(t') = \{F_1, F_2\} \wedge s_1 \propto t' \wedge s_2 \propto t' \wedge E\ I\ t'.$ zu zeigen: $t = t'$:

Für t gilt: $\rho(t) = \{F_1, F_2\} \wedge s_1 \propto t \wedge s_2 \propto t.$ Ann : $t = s_1 \Rightarrow \rho(t) = \rho(s_1) \Rightarrow$

$\{F_1, F_2\} = \{E, F_1\} \Rightarrow E = F_1$ Wid. Ann : $t = s_2 \Rightarrow \rho(t) = \rho(s_2) \Rightarrow$

$\{F_1, F_2\} = \{E, F_2\} \Rightarrow E = F_2$ Wid. $\overset{\text{Satz 1(1)}}{\Rightarrow} s_1 \propto t' \wedge s_2 \propto t'.$

$s_1 \mathbin{\dot{\cdot}.} s_2 \mathbin{\dot{\cdot}.} t \overset{\text{I4}}{\Rightarrow} F_2\ I\ s_1 \vee F_1\ I\ s_2 \vee E\ I\ t.$ Ann : $F_2\ I\ s_1 \overset{F_1\ I\ s_1}{\Rightarrow} F_1, F_2\ I\ s_1 \overset{\text{Satz 4(2)}}{\Rightarrow}$

$\bigvee^{1}_{s'\in S} \rho(s') = \{F_1, F_2\} \wedge s' \propto s_1 (\propto s) \overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Rightarrow} s' = t \Rightarrow t \propto s_1 \propto t$ Wid.

Ann : $F_1\ I\ s_2 \overset{F_2\ I\ s_2}{\Rightarrow} F_1, F_2\ I\ s_2 \overset{\text{Satz 4(2)}}{\Rightarrow} \bigvee_{s''\in S} \rho(s'') = \{F_1, F_2\} \wedge s'' \propto s_2 (\propto s$

$\overset{\text{Eindeut.}}{\Rightarrow} s'' = t \Rightarrow t \propto s_2 \propto t$ Wid. $\Rightarrow E\ I\ t \Rightarrow t = t'. \Rightarrow E\ I\ (F_1 F_2)_s \Rightarrow F_1[E]_s F_2$

(2) $" \Leftarrow "$: $F_1[E]_s F_2 \Rightarrow F_1, E, F_2 \,\mathrm{I}\, s \wedge E \,\mathrm{I}\, (F_1F_2)_s$. zu zeigen:

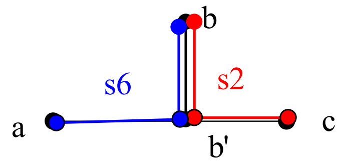
(a) $s_1 \propto s : E, F_1 \,\mathrm{I}\, s \wedge \rho(s_1) = \{E, F_1\} \wedge s_1 \because s \overset{\text{Satz 4(3)}}{\Rightarrow} s_1 \propto s.$

(b) $s_2 \propto s : E, F_2 \,\mathrm{I}\, s \wedge \rho(s_2) = \{E, F_2\} \wedge s_2 \because s \overset{\text{Satz 4(3)}}{\Rightarrow} s_2 \propto s.$

(c) $$\text{Ann} : w_1 \;\; \text{NW} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1 \propto s_2(\propto s) \Rightarrow E, F_1, F_2 \,\mathrm{I}\, s_2, s \overset{\substack{\text{Satz 7(4)} \\ s_2=(EF_2)_s}}{\Rightarrow} F_1 \,\mathrm{I}\, (EF_2)_s \\ s_2 \propto s_1(\propto s) \Rightarrow E, F_1, F_2 \,\mathrm{I}\, s_1, s \overset{\substack{\text{Satz 7(4)} \\ s_1=(EF_1)_s}}{\Rightarrow} F_2 \,\mathrm{I}\, (EF_1)_s \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} E[F_1]_s F_2 & \text{Wid zur Voraussetzung nach Satz 8(3)} \\ E[F_2]_s F_1 & \text{Wid zur Voraussetzung nach Satz 8(3)} \end{array} \right\} \overset{s_1 \because s_2}{\Rightarrow} w_1 \text{ GW}$$

Bem.: Bisher ist es möglich, auch Strecken dieser Art zu wählen:




$s_1 = (ac)$ $s_2 = (bc)$ $s_3 = (b'c)$ $s_4 = (ab')$ $s_5 = (bb')$ $s_6 = (ab)$

$s_3 \subseteq s_2$ $s_4 \subseteq s_6$ $s_5 \subseteq s_2$ $s_5 \subseteq s_6$ $\bigwedge_{s_i} s_i \subseteq s_1$ $\bigwedge_{s_i} s_i \subseteq s_i$

$a, b, b', c \,\mathrm{I}\, s_1$ $b, c, b' \,\mathrm{I}\, s_2$ $b', c \,\mathrm{I}\, s_3$ $a, b' \,\mathrm{I}\, s_4$ $b, b' \,\mathrm{I}\, s_5$ $a, b, b' \,\mathrm{I}\, s_6$

Dabei wird die Teilstrecke (bb') in beiden "Richtungen" durchlaufen, wenn man von a nach c gelangen will. Die Strecke (ac) hat sozusagen einen "spike" in b.

Eine Strecke (ac) wird durch einen Punkt b also *nicht dichotomisch geteilt*, da ein weiterer Punkt b' sowohl auf (ab) als auch gleichzeitig auf (bc) liegen kann. Der Punkt b' liegt im Beispiel sogar auf *allen* Strecken.

Um ein Winkelmaß zu definieren, will ich zuvor erklären wann zwei Winkel mit gleicher Ecke als gleich gelten sollen.

DEF 11: Zwei Winkel $w_1 = (E_1, s_1, s_2)$ und $w_2 = (E_2, s_3, s_4)$ heißen **koangulär** $(\tilde{\angle})$,

gdw. s $E_1 = E_2$ und $(E_1, s_1, s_3)$ NW und $(E_2, s_2, s_4)$ NW

Satz 10: Seien $w_1 = (E, s_1, s_2)$ und $w_2 = (E, s_3, s_4)$ koanguläre Winkel.

Dann gilt: $s_1 \ddots s_2 \Rightarrow s_3 \ddots s_4$

Bew.: Sei $s_1 \propto t \wedge s_2 \propto t$ für ein $t \in S$ und $(E, s_1, s_3)$ NW, $(E, s_2, s_4)$ NW

$$\text{Fall 1: } s_1 \propto s_3 \wedge s_2 \propto s_4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} s_1 \propto t \\ s_1 \propto s_3 \\ s_2 \propto t \\ s_2 \propto s_4 \end{array}\right\} \overset{T4}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{c} \bigvee_{s} s_3 \propto s \wedge t \propto s \\ \bigvee_{s'} s_4 \propto s' \wedge t \propto s' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\bigvee_{t'} s \propto t' \wedge s' \propto t'. \left\{\begin{array}{c} s_3 \propto s \propto t' \Rightarrow s_3 \propto t' \\ s_4 \propto s' \propto t' \Rightarrow s_4 \propto t' \end{array}\right\} \Rightarrow s_3 \ddots s_4$$

$$\text{Fall 2: } s_1 \propto s_3 \wedge s_4 \propto s_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} s_4 \propto s_2 \\ s_2 \propto t \end{array}\right\} \overset{T3}{\Rightarrow} s_4 \propto t \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} s_1 \ddots s_4 \\ s_1 \propto s_3 \end{array}\right\} \overset{\text{Satz 3}}{\Rightarrow} s_3 \ddots s_4$$

$$\text{Fall 3: } s_3 \propto s_1 \wedge s_2 \propto s_4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \begin{array}{c} s_3 \propto s_1 \\ s_1 \propto t \end{array} \overset{T3}{\Rightarrow} s_3 \propto t \\ \begin{array}{c} s_2 \propto s_4 \\ s_2 \propto t \end{array} \overset{\text{Satz 3(4)}}{\Rightarrow} s_4 \ddots t \end{array}\right\} \overset{\text{Satz 3(3)}}{\Rightarrow} s_3 \ddots s_4$$

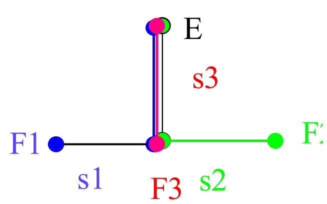
$$\text{Fall 4: } s_3 \propto s_1 \wedge s_4 \propto s_4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \begin{array}{c} s_3 \propto s_1 \\ s_1 \propto t \end{array} \overset{T3}{\Rightarrow} s_3 \propto t \\ \begin{array}{c} s_4 \propto s_2 \\ s_2 \propto t \end{array} \overset{T3}{\Rightarrow} s_4 \propto t \end{array}\right\} \Rightarrow s_3 \ddots s_4$$

Bem.: (1) $w_1 \tilde{\angle} w_2 \wedge w_1$ uneigentlich $\Rightarrow$ $w_2$ uneigentlich

(2) $w_1 \tilde{\angle} w_2 \wedge w_1$ eigentlich $\Rightarrow$ $w_2$ eigentlich

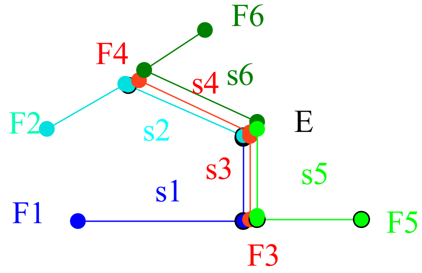
(3) $w_1 \tilde{\angle} w_2 \wedge w_1$ NW $\not\Rightarrow$ $w_2$ NW

(4) $w_1 \tilde{\angle} w_2 \wedge w_1$ GW $\not\Rightarrow$ $w_2$ GW




$(E, s_1, s_2)$ GW $(E, s_3, s_3)$ NW

Ein sinnvolles Winkelmaß kann mit diesen Axiomen jedoch nicht aufgebaut werden: Es ist zwar richtig, daß die Eigentlichkeit eines Winkels auf einen zu ihm koangulären vererbt wird, nicht gilt jedoch die wesentliche Transitivität der Koangularität, die es gestattet würde von dem Winkel einer gewissen Größe (seiner Äquivalenzklasse in bezug auf die Koangularität) zu reden.




Die Winkel $w_1= (E,s_1,s_2)$, $w_2= (E,s_3,s_4)$, $w_3= (E,s_5,s_6)$ seien alle eigentlich und $w_1 \overset{\sim}{\angle} w_2 \;\wedge w_2 \overset{\sim}{\angle} w_3$ aber es gelte nicht: $w_1 \overset{\sim}{\angle} w_3$, da weder $(s_1,s_5)$ noch $(s_2,s_6)$ als NW gewählt. Das ist tatsächlich ein Modell des Axiomensystems, fügt man noch einzelne Strecken hinzu ($s_7= (F_1,F_5)$, $s_8= (F_2,F_6)$, $s_9= (F_1,F_3)$, $s_{10}= (F_3,F_5)$, $s_{11}= (F_2,F_4)$, $s_{12}= (F_4,F_6)$) mit den notwendigen Inzidenzen.

Es gelten folgende Teilbeziehungen: $s_3 \propto s_1, s_5$, $s_4 \propto s_2, s_6$, $s_9 \propto s_1, s_{10} \propto s_5$,

$s_{11} \propto s_2, s_{12} \propto s_6$, $s_1, s_3, s_5, s_9, s_{10} \propto s_7$, $s_2, s_4, s_6, s_{11}, s_{12} \propto s_8$.

Es sieht also so aus, als müsse man für die Winkelmessung diese Spikes entfernen. Wir fordern daher, daß ein Punkt eine Strecke dichotomisch teilt.

DEF 12: (Inzidenzerweiterung)

(I5) $a, b, b', c$ paarw. verschieden $\wedge$ $a, c \;\; I \, s \wedge b, b' \, I \, (ac)_s \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad b' \, I \, (ab)_s \vee b' \, I \, (bc)_s$

Satz 11: (Erweiterung zu Satz 8 aufgrund (I5))

(1) $a[b]_s c \wedge a[b']_s c \quad \Rightarrow \quad b = b' \vee a[b']_s b \vee b[b']_s c$

(2) $a[b]_s c \wedge a[b']_s c \quad \Rightarrow \quad b = b' \vee a[b]_s b' \vee b'[b]_s c$

(3) $a[b]_s c \wedge b[b']_s c \quad \Rightarrow \quad a[b]_s b' \wedge a[b']_s c$

(4) $a[b]_s c \wedge a[b']_s b \quad \Rightarrow \quad b'[b]_s c \wedge a[b']_s c$

Bew: (1) Sei $b \neq b' \Rightarrow a, b, b', c$ paarw. versch. $\text{Vor} \Rightarrow b, b' \text{ I } (ac)_s \overset{\text{Vor},(I5)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow b' \text{ I } (ab)_s \vee b' \text{ I } (bc)_s \overset{\text{Def10}}{\Rightarrow} a[b']_s b \vee b[b']_s c$

(2) Folgt aus (1) bei Vertauschung von b mit b’ wegen symmetrischer Vor.

(3) $a = b' \Rightarrow a[b]_s c \wedge b[a]_s c \Rightarrow$ Wid nach S8(3) $\Rightarrow a \neq b' \Rightarrow a, b, b', c$ paarw.versch.

S8(6) $\Rightarrow a[b']_s c$ Nach Vor. ist $b \neq b' \wedge a[b]_s c \wedge a[b']_s c$.

S11(2) $\Rightarrow a[b]_s b' \vee b'[b]_s c$. Nach S8(3) und Vor $\Rightarrow \neg b'[b]_s c \Rightarrow a[b]_s b'$

(4) $\text{Vor} \wedge \text{S8(2)} \Rightarrow c[b]_s a \wedge b[b']_s a \overset{(3),a\leftrightarrow c}{\Rightarrow} c[b]_s b' \wedge c[b']_s a \overset{\text{S8(2)}}{\Rightarrow} b'[b]_s c \wedge a[b']_s c$

DEF 13 : Eine Abbildung $\sigma : G \to G$ heißt **Meroform**, wenn gilt:

(1) $\bigwedge_{s \in S} \sigma(s) \in S$ (Streckeninvariant)

(2) $\bigwedge_{r \in R} \sigma(r) \in R$ (Randinvariant)

(3) $\bigwedge_{s \in S} \sigma(\rho(s)) = \rho(\sigma(s))$ (randsicher)

(4) $s_1 \propto s_2 \Rightarrow \sigma(s_1) \propto \sigma(s_2)$ (teilsicher)

DEF 14 : (Streckenvergleich)

(1) $s_1 \;\leq_\sigma\; s_2$ $(\sigma-\text{kleinerodergleich})$ : gdw $\sigma(s_1) \propto s_2 \vee s_1 \propto \sigma(s_2)$

(2) $s_1 <_\sigma \; s_2$ $(\sigma-\text{kleiner})$ : gdw $s_1 \leq_\sigma s_2 \wedge \neg(s_2 \leq_\sigma s_1)$

(3) $s_1 \leq s_2$ (kleinerodergleich) : gdw $\bigwedge_{\sigma_1,\sigma_2} s_1 \leq_{\sigma_1} s_2 \rightarrow s_1 \leq_{\sigma_2} s$

(4) $s_1 < s_2$ (kleiner) : gdw $\bigwedge_{\sigma_1,\sigma_2} s_1 <_{\sigma_1} s_2 \rightarrow s_1 <_{\sigma_2} s$

(5) G heißt kleinerhomogen: gdw $\bigwedge_{s_1,s_2} (\bigvee_{\sigma} s_1 \leq_\sigma s_2) \rightarrow s_1 \leq s_2$

Bem: Wir sagen, ein **Teilrand t liegt auf einer Geraden g**, wenn er mit einem seiner Repräsentanten inzidiert.