Aufgabenblatt HP4

A1 Eine Münze wird 4 mal geworfen und die jeweils oben liegende Seite notiert.
a) Modelliere das ZE.
b) Berechne die W. folgende Ereignisse:
A: Kopf erscheint genau 2 mal
B: Kopf erscheint höchstens zweimal
C: Kopf erscheint mindestens zweimal
D: Kopf und Zahl erscheinen gleich oft
E: Nur der erste Wurf ist Zahl
F: Nur der zweite Wurf ist Kopf.

A2 Ein Würfel wird geworfen und die Augenzahl wird notiert.
Welche Funktionen f definieren eine W-Verteilung bzw. wie müssen, a bzw. b gewählt werden, damit f eine W-Verteilung definiert?

ω	1	2	3	4	5	6
f_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
f_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
f_3	1	0	0	0	0	0
f_4	0, 16	0,13	0,13	0,17	0,2	a
f_5	0,16	0,1	-0,05	0,2	0,1	b

A3 Bei einer Münze ist die W. für das Ereignis "Zahl" dreimal so groß wie für das Ergeignis "Kopf". Berechne daraus beide Wahrscheinlichkeiten.

A4 Eine Urne U1 enthält 8 von 1 bis 8 durchnummerierte Kugeln und eine Urne U2 6 von 1 bis 6 durchnummerierte Kugeln.

1) Aus jeder der beiden Urnen wird eine Kugel gezogen. Als Gewinn zählt, wenn Ereignis A: " Augensumme 7" oder Ereignis B: "Beide Kugeln tragen Nummer 4" eintreten. Der Einsatz ist 1 €. Im Gewinnfall erhält man 2 €.

a) Modelliere das ZE als Laplace-Exp. (Ω, f)
b) Stelle A und B als Teilmengen von Ω dar. c) Bestimme $P(A \cap B)$
d) Sind die Ereignisse A und B unabhängig?
e) Bestimme $P_B(A)$ und $P_A(B)$. f) Ist das Spiel fair? Wie müßte der Einsatz verändert werden, damit es fair wird?

2) Es wird blind eine Urne gewählt und dann eine Kugel gezogen. Die gezogene Kugel trägt die Nummer 3. Mit welcher W. stammt sie aus Urne 2. (Stelle zunächst einen W-Baum auf).

3) Aus Urne U1 wird mit Zurücklegen mehrmals eine Kugel gezogen. Wie oft muss man mindestens ziehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85% mindestens einmal die Nummer 3 gezogen wird?

A5 S. 239 **Ü 6**, S. 240 **Ü 13**, S. 241 **Ü 15**, S. 243 **Ü 25**

Lösungen

A1 a)

ω	kkkk	kkkz	kkzk	kkzz	kzkk	kzkz	kzzk	kzzz	zkkk	zkkz	zkzk	zkzz	zzkk	zzkz	zzzk	zzzz
f	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

b) $P(A) = P(\{kkzz, kzkz, kzzk, zkkz, zkzk, zzkk, \}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ $P(B) = P(\{zzzz, kzzz, zkzz, zzkz, zzzk\}) + P(A) = \frac{1}{1}$

$P(C) = P(T \geq 2) = 1 - P(T \leq 1) = 1 - P(\{zzzz, kzzz, zkzz, zzkz, zzzk\}) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{1}{1}$

$P(D) = P(A) = \frac{3}{8}$ $P(E) = P(\{zkkk\}) = \frac{1}{16} = P(\{zkzz\}) = P(F$

A2 f_1, f_2, f_3 sind W-Verteilungen. $f_4: 0,16 + 0,13 + 0,13 + 0,17 + 0,2 + a = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 0,79 = 0,2$

f_5 kann für kein b eine W-Verteilung sein, da f(3)<0.

A3 $f(z) = 3 \cdot f(k) \Rightarrow f(k) + f(z) = f(k) + 3 \cdot f(k) = 4 \cdot f(k) = 1 \Rightarrow f(k) = \frac{1}{4} \Rightarrow f(z) =$

A4 1) a) $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1), ..., (2,6), ...(8,1), ..., (8,6)\}; |\Omega| = 4$ Alle Ergebnisse haben die W. $\frac{1}{48}$

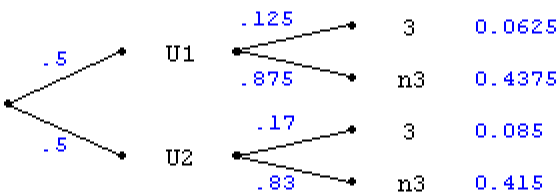
b) $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ $B = \{(4,4)\}$ c) $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ d) $P(A) = \frac{6}{48}$ $P(B) = \frac{1}{4}$

Da $\frac{6}{48} \cdot \frac{1}{48} \neq 0$ sind die Ereignisse abhängig.

e) $P_B(A) = 0 = P_A(B)$, weil $P(A \cap B) = 0$ f) "Gewinn" $= A \dot{\cup} B$ P(Gewinn)$= \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{7}{48}$

$P(\text{Gewinn}) \cdot 2 = \frac{7}{48} \cdot 2 = \frac{7}{24} \neq 1$. Also ist das Spiel nicht fair. Der Einsatz müsste $\frac{7}{24} \approx 0,30$ Euro betragen.

2)



$P_3(U2) = \frac{P(U2 \cap 3)}{P(3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{48}} = \frac{4}{7} \approx 0,57$

3) $P(T \geq 1) \geq 0,85 \Leftrightarrow 1 - P(T = 0) \geq 0,85 \Leftrightarrow P(T = 0) \leq 0,15 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^n \leq 0,15 \Leftrightarrow n \ln(\frac{7}{8}) \leq \ln 0,15 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,15}{\ln \frac{7}{8}}$ 14,2

$n \geq 15$.

Ü6 S.239: a) $P(w) = \frac{3}{5}$ $P(r) = \frac{2}{5}$ $P(rr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0,1$ b) $rr \rightarrow 5€$,$ww \rightarrow 2€$ Gewinnerwartung

$= P(rr) \cdot 5 + P(ww) \cdot 2 = \frac{4}{25} \cdot 5 + \frac{9}{25} \cdot 2 = \frac{20+18}{25} = \frac{38}{25} = 1,5$ Einsatz muss 1,52 Euro sein.

c) Treffer ist rot. $P(T \geq 1) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(T = 0) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(T = 0) \leq 0,05 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0,05 \Leftarrow$

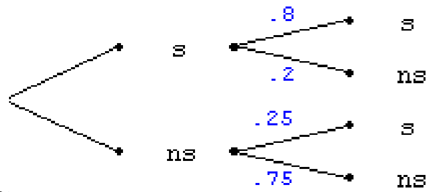
$n \ln \frac{3}{5} \leq \ln 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,6} \approx 5,86 \Rightarrow n \geq$

Ü13 S.240: a) $P(OTTO) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16 \cdot 9}{7^4} = \frac{144}{2401} \approx 0,0599 \approx 0,0$ b) P(OOTT,OTOT,OTTO,TTOO,TOTO,TOOT)=

$= 6 \cdot \frac{144}{2401} \approx 0,36$

Ü15 S.241: a) $P = 0,8 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,25 = 0,69$ b) $P = 0,8^2 \cdot 0,2$

$+ 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,75^2 = 0,370$

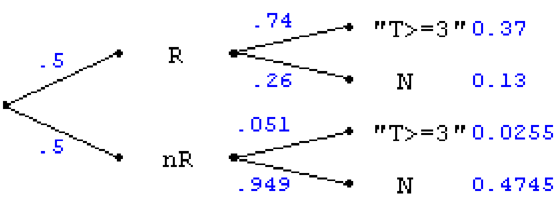


Ü25 S.243 a) $P(A) = P(\{11, 22, 33\}) = \frac{6+3+2}{32} = \frac{11}{32}$ $P(B) = P(\{31, 32, 33, 13, 2$

$P(C) = P(\{13, 22, 31\}) = \frac{3+3+2}{32} = \frac{8}{32}$ $P(D) = P(A \cap B) = P(33) = \frac{2}{3}$

b) $33 \rightarrow 10E$ $22 \rightarrow 5E$ $11 \rightarrow 3E$ $E(\text{Gewinn}) = \frac{2}{32} \cdot 10 + \frac{3}{32} \cdot 5 + \frac{6}{32} \cdot 3 = \frac{20+15+18}{32} = \frac{53}{32} \approx 1,6$ 1,66-2=0,34 Verlust

c)



$P_{T \geq 3}(R) = \frac{P(T \geq 3 \cap R)}{P(T \geq 3)} = \frac{0,37}{0,37 + 0,0255} = 0,9$

$P_{T \geq 3}(nR) = \frac{P(T \geq 3 \cap nR)}{P(T \geq 3)} = \frac{0,0255}{0,37 + 0,0255} = 0,06$