Fach: **Mathematik**
Prüfungsart: **1./2. Prüfungsfach**
Dauer: **5 Stunden**
Hilfsmittel: **Zugelassener Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung**

Die Aufgaben umfassen 6 Seiten!

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k: D_{max} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{kx^2}{x^2+k}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich in Abhängigkeit von k.

1.2 Untersuchen Sie die Funktionen der Schar auf einfache Symmetrien.

1.3 Ermitteln Sie die Gleichung der Asymptote f_{A_k} und untersuchen Sie, ob sich der Graph von f_k für $x \mapsto \pm\infty$ jeweils der Asymptote von oben oder unten annähert.

1.4 Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung von f_k.
(Zur Kontrolle: $f_k''(x) = \frac{2k^2 \cdot (k - 3x^2)}{(x^2+k)^3}$)

1.5 Zeigen Sie, dass alle Funktionsgraphen der Schar denselben Tiefpunkt haben und geben Sie diesen an.

1.6 Jeder Funktionsgraph von f_k mit $k > 0$ besitzt zwei Wendepunkte.
Auf welcher Kurve liegen diese Wendepunkte?

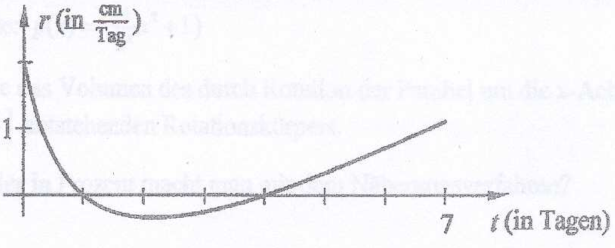
1.7 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisher ermittelten Eigenschaften den Graph der Funktion f_3 und die zugehörige Asymptote f_{A_3} in ein Koordinatensystem.

1.8 Für welche x-Werte ist der Abstand zwischen dem Graphen von f_3 und seiner Asymptote f_{A_3} kleiner als $\frac{1}{10}$?

2. Der Graph der Funktion $g: [-3;3] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_3(x)$ mit f_3 aus 1.7 beschreibt näherungsweise den Querschnitt eines Abwasserkanals (Maße in Metern).

2.1 Bestimmen Sie die Wasserhöhe im Kanal an seiner tiefsten Stelle, wenn die Wasseroberfläche 2 m breit ist.

2.2 Die Wasserhöhe im Abwasserkanal ändert sich. Diese Änderung wird beschrieben durch die momentane Änderungsrate $r(t) = \frac{t^2 - 5t + 4}{2(t+1)}$, wobei die Zeit t in Tagen und die Änderungsrate $r(t)$ in Zentimetern pro Tag gemessen wird. Eine negative Änderungsrate bedeutet, dass die Wasserhöhe abnimmt. Die Grafik stellt die Änderungsrate $r(t)$ während eines Beobachtungszeitraumes von 7 Tagen dar.



2.2.1 Wie groß ist die Änderungsrate zu Beginn der Woche?

2.2.2 Ermitteln Sie die Zeitpunkte, zu denen sich die Wasserhöhe nicht verändert.

2.2.3 Beschreiben Sie anhand der Zeichnung qualitativ die Veränderung der Wasserhöhe während der Woche. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang auch die Bedeutung der Nullstellen von r.

2.2.4 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Wasserpegel am stärksten sinkt.

2.2.5 Zeigen Sie, dass alle Funktionen R_c der Schar mit

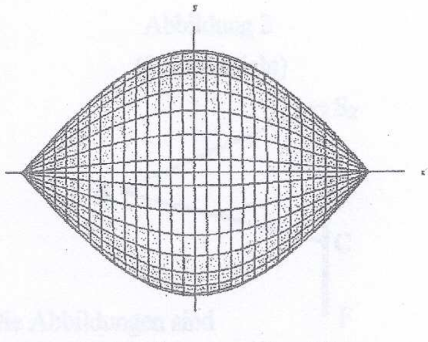
$$R_c(t)=\frac{1}{4}t^2-3t+5\cdot\ln(t+1)+c \quad \text{mit } t\in\mathbb{R}_0^+ \text{ und } c\in\mathbb{R}$$

Stammfunktionen der Änderungsratenfunktion r sind.

2.2.6 Die Funktionswerte der Stammfunktion R_c geben die Wasserhöhe im Kanal an seiner tiefsten Stelle in Zentimetern an. Die Konstante c hängt dabei von der Wasserhöhe zu Beginn der Woche ab. Welche Wasserhöhe hat der Kanal am Ende der Woche, wenn diese zu Beginn der Woche 75 Zentimeter beträgt?

2.2.7 Zu welchem Zeitpunkt der Woche hat der Kanal seinen höchsten Wasserstand?

3. Der abgebildete Körper entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion h mit $h(x)=\cos(x)$ um die x-Achse über dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



3.1 Berechnen Sie das exakte Volumen des abgebildeten Rotationskörpers.

Hinweis: $\int\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot(x+\sin(x)\cdot\cos(x))$.

3.2 Das Volumen des Rotationskörpers soll nun näherungsweise bestimmt werden. Hierzu wird der Graph der Funktion h im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ durch eine nach unten geöffnete Parabel p approximiert.

3.2.1 Ermitteln Sie die Parabelgleichung, wenn der Graph der Kosinusfunktion und die Parabel die gemeinsamen Punkte $P\left(-\frac{\pi}{2}\middle|0\right)$, $Q(0|1)$ und $R\left(\frac{\pi}{2}\middle|0\right)$ haben.
(Zur Kontrolle: $p(x)=-\frac{4}{\pi^2}x^2+1$)

3.2.2 Berechnen Sie das Volumen des durch Rotation der Parabel um die x-Achse über dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ entstehenden Rotationskörpers.

3.3 Welchen Fehler in Prozent macht man mit dem Näherungsverfahren?

Aufgabe 2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6 \mid -12 \mid 22)$, $B(38 \mid 4 \mid 22)$, $M(19 \mid 2 \mid 19)$ und die Ebene $e_1: 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 65$ gegeben.

1. Die Punkte A, B und M bestimmen eine Ebene. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

2. Die Punkte A und B seien Eckpunkte, der Punkt M sei Mittelpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms ABCD. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C und D und weisen Sie nach, dass das Parallelogramm ABCD ein Rechteck ist.

3. Ermitteln Sie die Spurgerade der Ebene e_1 mit der x_1x_2-Ebene.

4. In einem Fußballstadion liegt das Fußballfeld in der x_1x_2-Ebene. Eine Tribüne wird als ebene Fläche betrachtet; sie liegt in der zu Beginn der Aufgabe gegebenen Ebene e_1 (siehe Abbildung 1). Das Tribünendach sei durch das in Aufgabenteil 2 genannte Rechteck ABCD beschrieben.

   In den Punkten C und D ist das Dach an zwei senkrecht zur x_1x_2-Ebene stehenden Masten befestigt: Von den Mastspitzen $S_1(0|0|25)$ und $S_2(32|16|25)$ führt jeweils ein Befestigungsseil zum Punkt A bzw. zum Punkt B (siehe auch Abbildung 2).
   Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.

Abbildung 1

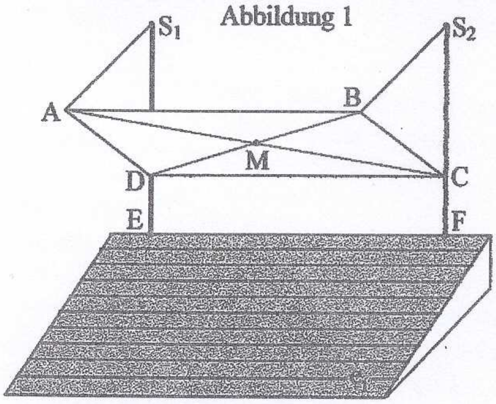
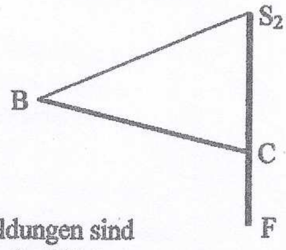


Abbildung 2
(Seitenansicht)



Die Abbildungen sind nicht maßstäblich.

4.1 Berechnen Sie

- den Winkel, unter dem die Tribüne im Vergleich zum Fußballfeld ansteigt, sowie
- den Winkel, den das Seil von der Mastspitze S_2 zum Punkt B und die Dachkante $\overline{BC}$ einschließen.

4.2 Im Punkt M soll ein Kontrollgerät installiert werden. Aus technischen Gründen ist ein Abstand zur Tribüne von mindestens 10 m vorgeschrieben. Prüfen Sie, ob diese Vorschrift erfüllt ist.

4.3 **Es fällt paralleles Sonnenlicht der Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -19 \end{pmatrix}$ auf das Dach. Die Ecke A wirft dabei einen Schatten, der im Punkt A' auf die Tribünenebene e, fällt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes A'.**

4.4 **Die Fläche des Rechtecks CDEF soll mit einem Werbetransparent ausgekleidet werden. Berechnen Sie das Flächenmaß dieses Transparents.**

Aufgabe 3

1. Das 14-tägig erscheinende Frauenmagazin „Aktiv Woman" erhält regelmäßig Leserbriefe. Erfahrungsgemäß beschäftigen sich davon mit dem Thema „Schönheit" 30 %, mit dem Thema „Mode" 25 %, mit dem Thema „Fitness" 20 %, mit dem Thema „Karriere" 15 % und mit dem Thema „Lifestyle" 10 %.

1.1 In den letzten 14 Tagen sind 16 Leserbriefe zum Thema „Schönheit" und 8 Leserbriefe zum Thema „Karriere" eingegangen. Für die nächste Ausgabe will die Chefredakteurin zu beiden Themen jeweils drei Briefe auswählen. Wie viele Möglichkeiten hat sie?

1.2 Die Redaktion vergibt an vier zufällig ausgewählte Zuschriften Preise. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Alle vier Preise gehen an Zuschriften zum Thema „Schönheit".

B: Mindestens zwei Preise gehen an Leserbriefe zum Thema „Fitness".

1.3 Die Lifestyle-Redaktion sucht dringend vier Leserbriefe zu ihrem Thema. Der noch nicht sortierten Leserpost entnimmt sie 30 Zuschriften.

1.3.1 Wie viele Zuschriften zum Thema „Lifestyle" kann sie darunter erwarten?

1.3.2 Wie viele Leserbriefe müsste sie diesem Stapel entnehmen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % wenigstens einen Brief zum Thema „Lifestyle" erhält?

1.4 Der magazineigene „Aktiv-Woman"-Club bietet auf der Homepage des Magazins im Rahmen einer Werbeaktion ein Glücksspiel an. Per Mausklick werden drei identische Glücksräder gedreht, die alle jeweils in 16 gleich große, von 1 bis 16 nummerierte Sektoren eingeteilt sind.

Zeigen alle Glücksräder die „1" an, so gewinnt der Spieler eine Wochenendreise im Wert von 250 €, zeigen alle Glücksräder Sektoren an, deren Nummern die Ziffer „5" enthalten, gewinnt man einen MP3-Player im Wert von 80 €, und zeigen alle Glücksräder gerade Zahlen an, so gewinnt der Spieler eine Kaffeetasse im Wert von 4 €.

Berechnen Sie den Geldbetrag, den die Zeitschrift langfristig pro Mitspieler für die Gewinnbereitstellung einplanen muss.

---

2. Um die Verkaufszahlen zu steigern, beauftragt die Zeitschrift „Aktiv Woman" ein Marktforschungsinstitut mit einer entsprechenden Studie. Dabei wird festgestellt:

- $\frac{1}{3}$ der Zeitschriften werden am Kiosk gekauft, die restlichen sind abonniert.
- $\frac{3}{5}$ der Abonnenten sind Mitglieder im „Aktiv-Woman"-Club, während nur $\frac{1}{4}$ der Kiosk-Käufer dem Club angehören.

2.1 Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

2.2.1 ein ausgewählter Leser kein Club-Mitglied ist.

2.2.2 ein Club-Mitglied die Zeitschrift nicht abonniert hat.

2.3 In der Druckerei treten erfahrungsgemäß bei 2 % der Zeitschriften Fehler auf, so dass diese nicht verkauft werden können. Bei der Qualitätskontrolle werden 400 Zeitschriften überprüft.
Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der fehlerhaften Zeitschriften und kann als binomialverteilt angenommen werden. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschheff-Ungleichung das kleinstmögliche Intervall ab, in dem die Zahl der fehlerhaften Zeitschriften mit mehr als 90 % Wahrscheinlichkeit liegt.